

Modelo computacional de la generación de problemas matemáticos

Estudiante: Ildikó Pelczer
Instituto de Ingeniería, UNAM
IPelczer@iingen.unam.mx

Tutor: Dr. Fernando Gamboa
Centro de Desarrollo Tecnológico, UNAM
gfer@servidor.unam.mx

Resumen

El tema de investigación presentado en el presente artículo es el desarrollo de un modelo computacional de los procesos que emplean los humanos para la generación de problemas matemáticos. La investigación abarca tanto la definición del modelo como su implementación para el dominio particular de problemas con secuencias. Los resultados intermedios consisten en la identificación de métodos usados para tal tarea, la definición de una representación de conocimiento que permita implementar los métodos y la identificación de factores de dificultad particulares al dominio de análisis matemático.

1. Propósito

Desarrollar un modelo computacional de la generación de problemas matemáticos por humanos e implementarlo para el caso de problemas con secuencias. En este sentido, el modelo debe considerar los requisitos que surgen desde la manera en la que los humanos cumplen esta tarea, es decir, aspectos como la experiencia, el conocimiento, las limitaciones de la memoria de trabajo, etc.

2. Trabajos previos

Aunque existen sistemas para la generación automatizada de problemas, éstos no son implementaciones de un modelo cognitivo.

ACTIVEMATH [1] es un medio de aprendizaje de las matemáticas que puede adaptarse a las metas, conocimiento, preferencias y habilidades del usuario. El sistema tiene un componente para generación de problemas de tipo “dónde está la falta” que se basa en meta-descripciones asociadas a problemas resueltos.

El sistema desarrollado por Cristea y Tuduca [2] es un generador automático de ejercicios sobre circuitos de corriente alterna. Se generan problemas con base en la descripción del flujo de cálculo en forma de árboles.

Martin y Mitrovic [3] han desarrollado un módulo para generación automática de problemas de SQL. Como los problemas de este tipo tienen una estructura estándar la generación se hace reemplazando partes de problemas previos considerando la información disponible sobre el conocimiento del usuario.

Estos sistemas tienen el propósito de funcionar como módulos integrados en sistemas de aprendizaje. En el entorno de la enseñanza de las matemáticas la generación de problemas se considera de suma importancia, aunque tradicionalmente ha sido ignorada (por ejemplo [4], [5]). Nuestro interés está en analizar el proceso de generación de problemas e identificar particularidades que permiten a los humanos generar una gran variedad de problemas en un dominio entre cuales también algunos que no se podrían generar de manera rutinaria por la simple aplicación de reglas específicas a un dominio. En las palabras de Pólya [5] confirman que la generación no es un proceso rutinaria: “Encontrar un nuevo problema que sea en mismo tiempo interesante y accesible no es fácil, para ello necesitamos experiencia, estilo y buena suerte.”

3. Objetivos

1. Proponer un modelo computacional de la generación de problemas, a partir del análisis del proceso en profesores y con base en trabajos existentes.
2. Definir una representación adecuada del conocimiento matemático para el modelo propuesto.
3. Identificar descripciones de los términos “problema de secuencias difícil y/o interesante”.
4. Implementar el modelo para el dominio particular de problemas con secuencias.
5. Evaluar el sistema desarrollado.

4. Metodología

1. Consultar libros de carácter autobiográfico de matemáticos para analizar sus puntos de vista sobre su

propio trabajo. Entrevistar personas dedicadas a la generación de problemas para identificar métodos generales y particulares a un dominio.

2. A partir de los métodos identificados definir requisitos para la representación del conocimiento.

3. Elaborar una taxonomía de los problemas con secuencias, identificar factores de dificultad y evaluar empíricamente los factores.

4. Análisis de sistema. Implementación. Pruebas y revisiones.

5. Evaluación del desempeño del sistema.

5. Avances

El trabajo hasta ahora se ha concentrado en las primeras tres metas. A partir de varios trabajos ([5], [6], [7], [8]) se ha establecido como punto de partida que un nuevo problema se genera a partir de problemas ya existentes y/o ejemplos básicos, y se involucran tanto conocimiento particular del dominio de interés como conocimiento matemático general.

Pólya [5] propone cuatro métodos generales para obtener nuevos problemas a partir de otros ya existentes: generalización, especialización, analogía y descomposición con recombinación. Una vez modificado un problema (aún si no está terminado) debe haber una etapa de revisión para identificar los elementos faltantes o la necesidad de reformular una pregunta, etc. En este sentido el modelo propuesto se encuadra entre los de tipo “genera-evalúa”. Los modelos de esta categoría formulan la creación como un proceso cíclico de etapas de generación y revisión de lo generado. La revisión tiene la función de establecer nuevas modalidades de continuación o imponer restricciones para la siguiente etapa de generación.

Una vez identificados los métodos posibles se han establecido los requerimientos que imponen a una representación del conocimiento matemático. Se han analizado problemas de libros de texto para dar una definición formal de los métodos para el área de problemas con secuencias. De esta manera, la *generalización* se interpreta, entre otras, como el cambio de una constante en variable o una variable en una expresión que involucra la variable, sin cambiar el dominio de la secuencia. La *analogía* se define como el cambio del dominio de la secuencia (por ejemplo, de numérica a matrices) guardando alguna característica del problema de partida. Para la aplicación del último método Pólya sugiere que es necesario identificar la *función* de los elementos que aparecen en el problema. En este trabajo, se define la *función* como una propiedad de un elemento. Por ejemplo, para una

secuencia puede ser “convergente”, para un parámetro puede ser su pertenencia a un conjunto particular (número racional) si esta característica asegura alguna propiedad de la secuencia o expresión matemática.

La implementación de los métodos requiere que en la representación del conocimiento se describa cada elemento, ya que *a priori* no se puede saber nada sobre la naturaleza de los elementos a y x (si son constantes o parámetros) en una expresión de forma $a_n = a \sin(n!x\pi)$. Se ha elaborado la estructura general de la ontología necesaria.

En cuanto a la tercera meta, se ha definido una taxonomía de los problemas con secuencias [9] hasta este momento se han identificado (a partir de análisis de problemas de libros de texto) factores de dificultad particulares a los problemas con secuencias.

7. Resultados preliminares

Al analizar problemas de libros de texto se ha concluido que para problemas con secuencias es necesario emplear métodos más generales (generalización, analogía) que reglas específicas al dominio.

Para implementar estos métodos es necesario ir más allá de una representación formal del conocimiento matemático y dar una descripción detallada de los elementos involucrados en una expresión.

8. Referencias

- [1] E. Melis y G. Gogvadze, “Towards adaptive generation of faded examples”, *Intelligent Tutoring Systems*, LNCS, Springer, 2000, pp. 762-771.
- [2] Cristea, P. y R. Tudu: “Automatic generation of exercises for self-testing in adaptive e-learning systems: exercise on AC circuits”. *3rd Workshop on Authoring for adaptive educational software*, Amsterdam, 2005.
- [3] Martin, B. y A. Mitrovic. “Automatic problem generation in constraint-based tutors”. *Intelligent Tutoring Systems*, LNCS, Springer, 2002, pp. 388-398.
- [4] E. A. Silver, “Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing”, *ZDM*, 29 (3), 1997, pp. 75-80.
- [5] Pólya, G., *How to Solve it*. Univ. Press, Princeton, 1945.
- [6] Poincare, H. *Science and hypothesis*. Walter Scott Publishing, London, 1905.
- [7] Simon, J. “Szerkesszunk feladatokat”, *Matlap*, X(4), Kolozsvár, pp. 128-132.
- [8] Batinetu, D., Maftei, I. y I. Stancu-Minasian. *Exercitii si probleme de analiza matematica pentru clasele a XI-a si a XII-a*. Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1981.
- [9] Pelczer, I., Gamboa, F. Clasificación de problemas de con secuencias. *Virtua Educa'2006*, Bilbao, 20-23 Junio 2006.